

STIVHEDSBETINGET
DIMENSIONERING
AF JERNBETONPLADER

DESIGN OF REINFORCED
CONCRETE SLABS WITH SPECIAL
REFERENCE TO STIFFNESS

WITH AN ENGLISH SUMMARY

ERIK TRUDSØ

Forord

Med motivering i den national- og privatøkonomiske interesse, som knytter sig til muligheden for at forbedre og billiggøre etageadskillelser i beboelseshuse, indledte Statens Byggeforskningsinstitut i 1947 en undersøgelse, der resulterede i instituttets rapport nr. 7, "Dæk og Huse" (52 P 5).

Rapporten indeholder bl. a. den konklusion, at krydsarmerede betondæk er billigst blandt de traditionelle dæktyper ved samtlige undersøgte belastningstilfælde og hustyper, og det var derfor nærliggende, at SBI fortsatte arbejdet med en endnu grundigere undersøgelse af jernbetondækkene for at kunne udgive en praktisk anvisning for projektering og udførelse af disse dæk.

Ved udarbejdelsen af rapporten havde man mødt den vanskelighed, at der ikke forelå noget kriterium for, hvor tynde jernbetonplader man kunne tillade sig at anvende. Et ret stort materiale fra praksis tydede på, at forholdet mellem pladetykkelse h og spændvidde k passende kunne sættes til

$$\frac{h}{k} > \frac{1}{31},$$

når man ønskede at være på den sikre side, og denne regel anvendtes derfor som en foreløbig praktisk tilnærmelse ved sammenligningen mellem jernbeton-, hulstens- samt træ- og jernbjælkedæk.

Da interessen nu skulle koncentreres specielt om jernbetondæk, var det ønskeligt at foretage en mere differentieret stivhedsundersøgelse.

For undersøgelsesarbejdet som helhed redegøres i "Internt Studie" nr. 2, hvortil særligt interesserede henvises, men det har dog skønnes rimeligt her for en større kreds at give en oversigt over konklusionerne.

Det er indlysende, at resultater af en forfinet undersøgelse må udvise anselige afvigelser fra en summarisk middelværdi som den nævnte; dog afviger denne orienteringsvist valgte værdi af forholdet $\frac{h}{k}$ ikke væsentligt fra en middelværdi $\left(\frac{1}{33,5}\right)$ af dette forhold, beregnet udfra de senere fundne resultater.

Niels Munk Plum

STIVHEDSBETINGET DIMENSIONERING AF JERNBETONPLADER

Design of Reinforced Concrete Slabs with Special Reference to Stiffness

Civilingeniør ERIK TRUDSØ, København

Indledning

UDK 624.073 : 624.012.45

I nærværende artikel gøres rede for en deformationsberegning, foretaget ved Statens Byggeforskningsinstitut med det formål at opstille en dimensioneringsregel til sikring af fornøden stivhed hos jernbetonplader.

De danske normers krav [5] til jernbetonplader sikrer kun imod brud — ikke imod for store deformationer. Af økonomiske grunde vil man ofte stræbe efter så tynde dæk som muligt, hvad der ifølge tidligere undersøgelser [1] kan føre til plader, der er så tynde, at de vil være for slappe i praksis, uanset deres teoretisk acceptable brudstyrke.

Sådanne pladers mangel på stivhed viser sig muligvis straks ved afformningen, men ofte giver den sig først til kende i tidens løb ved en tiltagende nedbøjning, der bl. a. kan medføre skæmmende revner i lette skillerum, som er opført på den eftergivende plade.

Der er her tale om en langtidsdeformation, som forårsages af betonmaterialets krybning og som må begrænses til det uskadelige, bl. a. ved passende valg af armeringsmateriale og betonkvalitet.

Hertil kræves *dels* fastlagt en største tilladelig — d.v.s. uskadelig — deformation, *dels* konstateret, hvilke materialevalg der giver plader med deformationer under den vedtagne grænse.

Største tilladelige langtidsdeformation

Jern- og træbjælkelags største nedbøjningstilvækst som følge af bevægelig belastning fastsættes af danske normer [4] og [6] til $1/500$ af spændvidden k ; en tilsvarende regel findes ikke for jernbetonpladers største deformationstilvækst, men kan dannes analogt med den normgivne.

Ved den foreliggende undersøgelse er for *enkeltarmerede* jernbetonpladers langtidsdeformation valgt en maksimal tilladelig vinkeldrejningstilvækst 4θ på

$$\Delta\theta_{\text{till.}} = 64 \cdot 10^{-4} \text{ radian, } \dots \dots \dots (1)$$

hvilket netop er den maksimale vinkeldrejning af en jævnt belastet homogen bjælke, hvis største nedbøjning, regnet i forhold til dens momentnulpunkter, udgør 1/500 af afstanden k_0 mellem disse.

Krydsarmerede pladers absolut største vinkeldrejning $\Delta\theta_{\text{max.}}^+$ findes kun i to punkter, nemlig i midtersnittets momentnulpunkter.

Udfra en sandsynlighedsbetragtning samt efter forbillede i K. W. Johansen's "Pladeformler" [2] lader vi grænsværdien $64 \cdot 10^{-4}$ radian iflg. (1) gælde *middel*vinkeldrejningen $\Delta\theta_m^+$ langs den kurve, som forbinder den dobbeltspændte plades momentnulpunkter. For en kvadratisk, simpelt understøttet plade tillades dermed en ca. 50 %'s lokal overskridelse i forhold til middeldeformationen iflg. (1).

Forudsætninger for deformationsberegning

I deformationsberegningen indgår i ethvert konkret tilfælde de *givne størrelser*,

spændvidde k

sideforhold $\gamma = \frac{k}{l}$ for pladen, hvis længste spændvidde kaldes l ;

endvidere *valget af*

armeringsmåde (enkelt- eller krydsarmering m. m.) og armeringsmateriale,

samt *delvis skønnede forhold* såsom

betonens elasticitetskoefficient,
understøtnings- og indspændingsbetingelser,
brugsbelastninger og momenter og
spændingsfordeling.

Resultatet af undersøgelsen fremtræder som 6 diagrampar (fig. 1) svarende til de 6 kombinationer mellem

2 armeringsmåder:

enkeltarmering (\neq) og
krydsarmering (+) — og

3 armeringsmaterialer:

rundjern (\emptyset) med $r_j = 1300 \text{ kg/cm}^2$
tentorstål ($\oplus 2200$) med — iflg. gamle normer — $r_j = 2200 \text{ kg/cm}^2$
tentorstål ($\oplus 2600$) med — iflg. nye normer — $r_j = 2600 \text{ kg/cm}^2$.

Hvert diagrampar begrænser et område, inden for hvilket man kan finde en stivhedsmæssigt forsvarlig betonspænding r_b , altså pladens indspændingsbetingelser og spændvidde.

Ved krydsarmerede plader har som nævnt *sideforholdet* γ en vis betydning, der imidlertid er ringe i sammenligning med spændviddens og derfor ikke er vist i den grafiske fremstilling af det endelige resultat.

Der er desuden set bort fra tilfælde af uens armering i de to retninger af den krydsarmerede plade, fordi ensarmerede plader almindeligvis er tyndere — og dermed mindre stive — end uens armerede; de sidstnævnte udgør altså et mindre farligt tilfælde end de første.

Efter denne præsentation af undersøgelsens resultat: forsvarlige betonspændinger r_b i afhængighed af *givne* spændvidder, opdelt efter *valgt* armeringsmåde og -materiale — skal der gøres rede for beregningsforudsætninger, som i højere grad beror på *skøn*.

Betonens elasticitetskoefficient

På grund af krybningsfænomenets komplicerede natur har forenkling været nødvendig; man har valgt at indregne krybningens virkning i betonmaterialets "formelle" eller "effektive" elasticitetskoefficient, defineret ved den sædvanlige Hook'ske ligning,

$$\sigma = E_b \cdot \epsilon, \dots \dots \dots (2)$$

hvor ϵ betyder den *totale* relative deformation, altså summen af elastisk og krybningsbetinget deformation pr. længdeenhed.

Ved *korttidsbelastning* er det skønnet forsvarligt at tildele E_b en sådan værdi, 210 000 kg/cm², at forholdet n mellem jernets og betonens elasticitetskoefficienter bliver 10.

"Korttid" (index:1) tages ikke i betydningen "øjeblik", men blot som betegnelse for en varighed (f. eks. en måned), der er en størrelsesorden mindre end en "langtid" (et eller flere år, index:2). Vi sætter altså som tilnærmelse

$$n_1 = 10. \dots \dots \dots (3)$$

Ved *langtidsbelastning* regner man ofte E_b lig med 1/3 af korttidsværdien, altså ca 70 000 kg/cm², hvad der giver $n = 30$. Til de foreliggende beregninger er fulgt H. Nylander's skøn [8], s. 193, $E_b = 75\ 000 \text{ kg/cm}^2$ for en beton med terningstyrken 200 kg/cm², altså iflg. [5] $r_b = 0,3125 \cdot 200 \approx 60 \text{ kg/cm}^2$; denne E_b -værdi antages gældende for beton efter så langvarig belastning, at krybningen er ophørt, og medfører

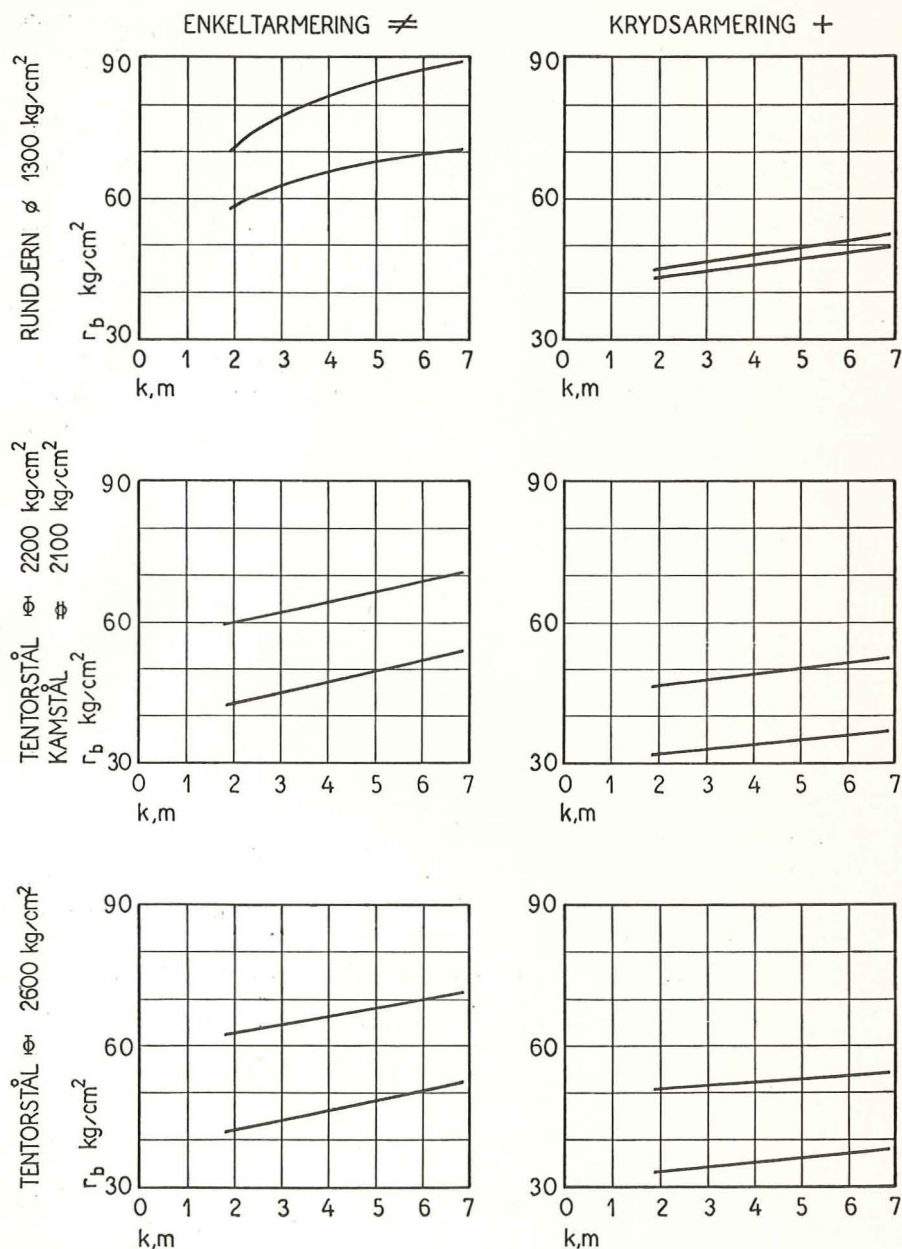


Fig. 1. Stivhedsmæssigt forsvarlige værdier af den tilladelige betontrykkspænding r_b . Øvre diagram: fuld indspænding. Nedre diagram: moderat indspænding.

Values of the permissible compressive stress in the concrete, r_b , ensuring adequate stiffness. Upper diagram: rigidly built in slab. Lower diagram: moderately clamped slab.

$$n_2 = 28; \dots\dots\dots (4)$$

som tilnærmelse lader vi endvidere dette skøn gælde *uanset betonkvalitet*. Undersøgelsens økonomiske rammer har ikke tilladt alternative beregninger med f. eks. $n_2 = 30$ eller $n_2 = 40$.

Til brug ved *dimensionering* er anvendt den i praksis almindelige n -værdi på 15, altså (med index: 0)

$$n_0 = 15. \dots\dots\dots (5)$$

Understøtningsbetingelser

Den brøkdelen i af feltarmeringen, der bøjes op ved en mellemunderstøtning, er oftest lig $\frac{1}{2}$ ved almindeligt dansk boligbyggeri, bl. a. fordi nabopladerne ikke altid er stor nok til uden videre at optage det fornødne moment, såfremt en større del af jernene opbøjes; i tilfældet $i > \frac{1}{2}$ er det desuden stivhedsmæssigt på den sikre side at bruge resultater af beregninger med $i = \frac{1}{2}$. I betragtning heraf har man valgt alene at forudsætte *opbøjningsfaktoren*

$$i = \frac{1}{2}. \dots\dots\dots (6)$$

For yderligere at mindske de variables antal indskrænkes undersøgelsen til kun at angå *yderfag*, idet sådanne, alt andet lige, deformeres mindst lige så meget som *mellemfag*. Enkeltarmede plader er derfor regnet som *yderfag* og krydsarmede plader som *hjørnefag*; i flæng betegnes de som *yderplader*.

At vurdere *indspændingsgrader* må i konkrete tilfælde overlades den projekterende; over variationsintervallet for indspændingsgraden i almindelighed kan der imidlertid godt opstilles skøn med rimelig gyldighed. Beregningerne baseres her på en øvre og en nedre grænse for yderpladers indspændingsgrad over mellemunderstøtningen, og den resulterende variation i forsvarlige r_b -værdier er givet til kende ved diagrammernes parvise optræden i fig. 1.

Øvre diagram, "*fuld indspænding*", svarer overalt til, at indspændingsforholdene er som ved en understøtning mellem nogenlunde lige store, i det væsentlige ens belastede plader — altså betingelser, under hvilke man tør se bort fra pladens eventuelle tangentdrejning ved mellemunderstøtningen. I dette tilfælde er det skønnet forsvarligt at lade, som om det faktiske momentnulpunkt for en sådan yderplade sammenfalder med armeringsjernenes opbøjningspunkt i afstanden $\frac{1}{3} \cdot k$ fra mellemunderstøtningen, altså momentnulpunktsafstanden

$$k_0 = 0,8 \cdot k. \dots\dots\dots (7)$$

Nedre diagram, "moderat indspænding", svarer overalt til sådanne indspændingsvilkår, som lader en enkeltarmeret plades faktiske momentnulpunktsafstand være identisk med den ved dimensioneringen forudsatte. Man betragter således den midterste del af en plade som simpelt understøttet, hvilende på pladens udkragede yderdel langs den indspændte side, og den nævnte yderdel skønnes at have samme udstrækning som ved brud.

Ved enkeltarmerede yderplader giver disse vilkår

$$k_0 = \sqrt{\frac{8}{9,3}} \cdot k = 0,926 \cdot k, \dots\dots\dots (8)$$

medens der ved krydsarmerede hjørneplader kan regnes med

$$k_0 = \sqrt{\frac{24}{27}} \cdot k = 0,943 \cdot k. \dots\dots\dots (9)$$

Belastninger

Dimensioneringslasten q_0 omfatter iflg. normerne dækkets egenvægt samt en bevægelig last på 200 kg/m² tillige med 100 kg/m² for lette skillerum.

Brugslasten, efter hvilken en jernbetonplades faktiske deformationer bør beregnes, behøver ikke være identisk med q_0 . Således synes det rimeligt at ansætte langtidslasten q_2 till ca 85 % af q_0 , idet den 15 %'s reduktion svarer til, at man — som en sandsynlig antagelse — fraregner halvdelen af den bevægelige last. Orienteringsvis er q_2 dog også sat lig med q_0 .

Korttidslasten q_1 bør til det foreliggende brug sættes lig med den faktiske belastning på det tidspunkt, da eventuelle lette skillerum netop er færdigbyggede. Der er foretaget beregninger med alternative skøn over q_1 , som til orientering dels er sat identisk med q_0 , dels lig med den reducerede q_2 . Efter som det sidste valg for en nærmere betragtning forekommer mest realistisk og desuden er det sikreste i nærværende sammenhæng, baseres de endelige beregninger herpå. Vi sætter i det følgende

$$q_1 = q_2 = 0,85 \cdot q_0. \dots\dots\dots (10)$$

Spændingsfordelinger

Efter forrige afsnits almindelige forudsætninger skal nu omtales tre alternativt antagne spændingsfordelinger, der alle betragtes som faktisk forekommende i tværsnit af een og samme plade under brugslast.

De tre spændingsfordelinger afviger indbyrdes ved, at betonen i den strakte zone antages at medvirke i forskellig grad, altså, om det strakte betontværsnit er: ikke medvirkende, delvis medvirkende eller fuldt medvirkende. I artiklens appendix er nævnt 7 formler (a)—(g), som følger af de valgte fordelinger.

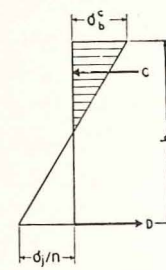


Fig. 2.

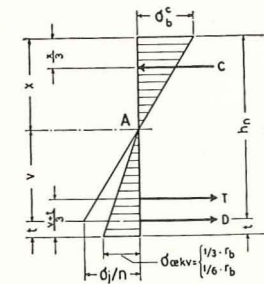


Fig. 3.

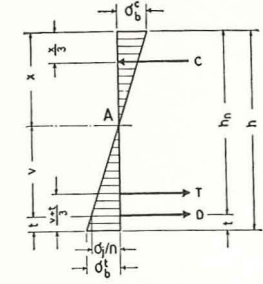


Fig. 4.

Fig. 2. Spændingsfordeling for revnede tværsnit. Den strakte beton medvirker ikke. Stress distribution in cracked cross sections. The concrete in tension does not contribute to the stiffness.

Fig. 3. Spændingsfordeling for tværsnit midt imellem to naborevner. Den strakte beton medvirker delvis.

Stress distribution in cross sections between two neighbouring cracks. The concrete in tension contributes partially to the stiffness.

Fig. 4. Spændingsfordeling for svagt påvirkede tværsnit. Den strakte beton medvirker fuldtud.

Stress distribution in slightly stressed cross sections. The concrete in tension contributes altogether to the stiffness.

Det strakte betontværsnit medvirker ikke

Fig. 2 forestiller den spændingsfordeling, der ligger til grund for sædvanlig brudbestemt dimensionering; man regner ikke med trækspænding i betonen, men lader armeringen optage hele trækraften — og betonen hele trykkraften efter en retliniet spændingsfordeling. Dette spændingsbillede lader vi gælde som realistisk under brugslast i alle pladens revnede tværsnit. Angående formler for denne fordeling, se appendix, ligninger (a) og (b).

Det strakte betontværsnit medvirker delvis

Selv efter revnedannelsen hjælper betonen imellem revnerne med at optage trækspændinger, hvorved deformationerne bliver mindre, end hvis armeringen overalt var alene derom. Arne Johnson [7] har gennem teori og laborieforsøg sandsynliggjort, at den strakte beton midt mellem to revner er påvirket praktisk talt til trækbrudgrænsen, uanset de to naborevners placering langs pladebjælkens akse.

På grundlag af nærmere overvejelser antages i det følgende:

Den faktiske spændingsfordeling i trækzonen midt mellem to revner er parabolisk; 2'grads parablens ordinat er 0 ved det neutrale plan og identisk

med betonens træk-brudspænding σ_b^t ved den strakte zones kant, som udgør parablens akse. σ_b^t identificeres med halvdelen af bøjningstrækstyrken, der ved *korttidspåvirkninger* sættes lig $1/6$ af betonens på kendt vis fundne teringtrykstyrke; denne er iflg. [5] lig med $r_b : 0,3125$, hvoraf

$$\sigma_{b1}^t = \frac{r_b}{12 \cdot 0,3125} = \frac{r_b}{3,75} \dots \dots \dots (11)$$

Ved *langtidspåvirkninger* regnes med det halve heraf, altså

$$\sigma_{b2}^t = \frac{r_b}{7,50} \dots \dots \dots (11 a)$$

Herudfra beregnes den formelle "ækvivalente kantspænding", $\sigma_{ækv.}$, der ved en tænkt retliniet fordeling ville lade trækzonens bidrag til det indre snitmoment være det samme, som resulterer af den virkelige, nært paraboliske trækspændingsfordeling.

$\sigma_{ækv.}$ følger af σ_b^t iflg. (11) og (11 a) ved multiplikation med $\frac{5}{4}$, altså

$$\sigma_{ækv. 1} = \frac{1}{3} \cdot r_b \dots \dots \dots (12) \quad \text{og} \quad \sigma_{ækv. 2} = \frac{1}{6} \cdot r_b \dots \dots \dots (12 a)$$

Herefter antages fig. 3 som billede af en tilnærmet rigtig spændingsfordeling i snit midt mellem naborevner. Angående formler for denne fordeling, se appendix (c) og (d).

Det strakte betontværsnit medvirker fuldt ud

I modsætning til de to *punktvist lokaliserede* spændingsfordelinger i det foregående er der nu tale om forhold langs et sammenhængende område af pladen, nemlig om spændingsfordelingen iflg. fig. 4 gældende langs områder nærmest pladens momentnulpunkter. Her er den strakte beton svagt påvirket og derfor i det væsentlige urevnet. Angående formler for denne fordeling, se appendix (e) og (f).

Deformationer og forsvarlige r_b -værdier for enkeltarmeret plade

Den enkeltarmerede plades vinkeldrejning Θ_0 ved momentnulpunkterne beregnes nu udfra den antagelse, at forrige afsnits to første spændingsfordelinger (figurerne 2 og 3) gælder vekselvis i pladens *midterområde*, hvori revnede og urevnete tværsnit findes side om side, medens den tredje

spændingsfordeling (fig. 4) gælder uidskrænket i pladens urevnete *yderområder* nær ved momentnulpunkterne.

Først beregnes ekstremumsværdierne $\Theta_{0,max.}$ og $\Theta_{0,min.}$, der ville fremkomme, såfremt de alternative fordelinger fig. 2 henholdsvis fig. 3 hver for sig var *enerådende* på midterområdet. I virkeligheden forløber overgangen mellem ekstremumstilstandene formentlig bølgeformigt, hvad der motiverer, at den resulterende vinkeldrejning dannes ved et kompromis mellem $\Theta_{0,max.}$ og $\Theta_{0,min.}$. Som det indtil videre bedste skøn sættes det simple middeltal

$$\Theta_0 = \frac{1}{2} \cdot (\Theta_{0,max.} + \Theta_{0,min.}) \dots \dots \dots (13)$$

Idet z betegner et tværsnits koordinat i armeringsretningen, regnet ud fra midtpunktet mellem pladens nulpunkter — der således får koordinaterne $\pm \frac{1}{2} \cdot k_0$ — skal z_g betegne koordinaten til grænsen mellem midter- og yderområde. Her går figurerne 3 og 4 over i hinanden, d.v.s. betonens trækspænding σ_{bg}^t er her lig med $\sigma_{ækv.}$, og tryk- og trækzonens retliniede spændingskonturer flugter med hinanden; z_g findes i ethvert tilfælde af ligning (g).

For $z = 0$ sættes vinkeldrejningen lig 0, medens Θ_g er vinkeldrejningen ved grænsen z_g . Tilsvarende er Θ_y yderområdets vinkeldrejning mellem snittene $z = z_g$ og $z = \frac{1}{2} \cdot k_0$.

Da kan Θ_0 iflg. (13) skrives:

$$\Theta_0 = \Theta_g + \Theta_y = \frac{1}{2} \cdot (\Theta_{g,max.} + \Theta_{g,min.}) + \Theta_y \dots \dots \dots (14)$$

hvorved den resulterende vinkeldrejning er spaltet op i bidrag fra hver af de betragtede spændingsfordelinger.

Disse fordelinger befinder sig i sådanne tværsnit, som af *symmetrigrunde* kan regnes plane både før og efter deformationen. Et pladeelement af længden dz får følgende vinkeldrejning $d\Theta$ mellem sine lodrette begrænsningsflader

$$\frac{1}{100} \cdot d\Theta = \frac{\sigma_b^c}{E_j \cdot h_n} \cdot (n + \gamma) \cdot dz \dots \dots \dots (15)$$

hvor

koordinaten z regnes i meter,
vinkeldrejningen Θ i radianer,
betonspændingen σ_b^c ved den trykkede kant i kg/cm^2 ,
jernets elasticitetskoefficient E_j i kg/cm^2 ,
nyttehøjden h_n i cm, medens
elasticitetsforholdet n og
spændingsforholdet $\gamma = \frac{\sigma_j}{\sigma_b^c}$ er rene tal.

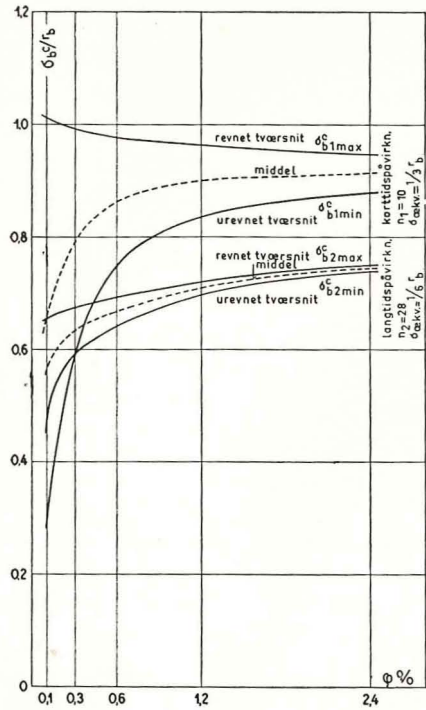


Fig. 5. Eksempel på betontrykspændinger σ_b^c i det farligst påvirkede snit af en på sædvanlig vis dimensioneret plade — moderat indspændt og belastet med 85 % af dimensioneringslasten.

Example showing the compressive stresses in the concrete, σ_b^c , in the most heavily stressed cross section of a slab designed in the usual manner, moderately clamped, and submitted to 85 per cent of the design load.

Altefter valg af spændingsfordeling afhænger σ_b^c og γ af hinanden samt af armeringsprocenten φ ifølge allerede nævnte ligninger (a)—(f) i appendix.

Af disse ligninger er (a) og (b) samt (e) og (f) enkle og giver uden videre σ_b^c og γ for de pågældende tværsnit; derimod er (c) og (d) implicite udtryk i disse størrelser og må løses sammen ved forsøg. I dette tilfælde lader vi som tilnærmelse midtersnittets spændingsforhold γ_{midt} gælde på hele den inderste halvdel af midterområdet og bruger grænsesnittets spændingsforhold γ_g på resten af området. Den antagne spændingsfordeling fig. 3 for

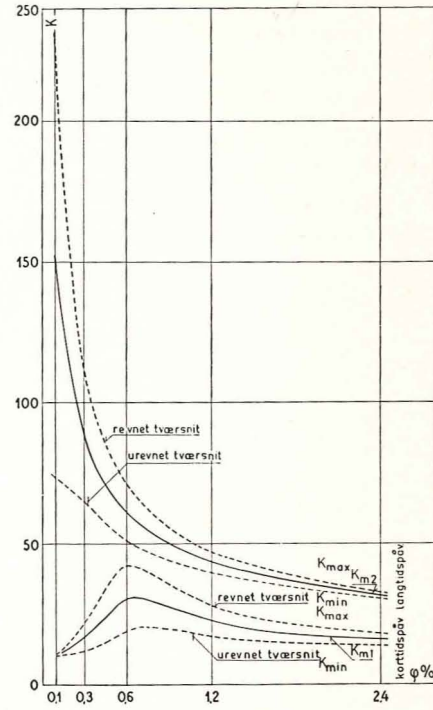


Fig. 6. Deformationskoefficienter K ved moderat indspænding.

Coefficients of deformation K . Moderately clamped slabs.

urevnede tværsnit i midterområdet medfører, at den neutrale akse ligger højere midt i området end ved dets grænser. Ved den foretagne tilnærmelse lader man aksens være retliniet og vandret, men tildeler den et spring — som lokaliseres vilkårligt til $z = \pm \frac{1}{2} \cdot z_g$ — hvorved dens beliggenhed bliver korrekt ved midten og ved grænserne. Således regnes inderpartens deformation lidt for stor, yderpartens lidt for lille — alt i alt fås ved integration en lidt rigelig værdi af $\Theta_{g,min.}$, men god overensstemmelse med det rigtige er konstateret i et analogt tilfælde ved sammenligning med resultatet af grafisk interpolation på basis af finere intervalopdeling.

Til illustration af forholdene i midterområdet tjener fig. 5, som vedrører pladens farligst påvirkede snit under kort- og langtidsbelastningerne q_1 og q_2 iflg. (10). Pladen er forudsat dimensioneret på vanlig vis for totallasten q_0 og med $n = n_0 = 15$ iflg. (5). De faktiske spændinger beregnes efter (a)—(d), idet iflg. (3) og (4) $n_1 = 10$ og $n_2 = 28$.

Af figuren fremgår, at betonens trykspænding, især ved små jernprocenter, varierer ret stærkt mellem pladens revnede midtersnit og et nærtbeliggende snit midt imellem to revner; dette er særlig udpræget ved korttidsbelastning, fordi den ækvivalente beton-trækspænding $\sigma_{\text{ækv.}}$ da udgør $\frac{1}{3} \cdot r_b$ imod $\frac{1}{6} \cdot r_b$ ved langtidspåvirkning.

Ved integration af (15) i overensstemmelse med ovenstående fremkommer $\Theta_{g,max.}$, $\Theta_{g,min.}$ og Θ_g ; komponenterne i (13) udvikles herefter til

$$\Theta_{0,max.} = \frac{300}{16} \cdot \frac{q \cdot k_0^3}{E_j \cdot h_n^3} \cdot K_{max.} \dots \dots \dots (16)$$

og

$$\Theta_{0,min.} = \frac{300}{16} \cdot \frac{q \cdot k_0^3}{E_j \cdot h_n^3} \cdot K_{min.}, \dots \dots \dots (17)$$

hvor $K_{max.}$ og især $K_{min.}$ er komplicerede udtryk, af hvilke numerisk beregning giver billeder som vist på figurerne 6 og 7, der tillige indeholder middelværdier K_m mellem $K_{max.}$ og $K_{min.}$. Således omformes (13) til

$$\Theta_0 = \frac{300}{16} \cdot \frac{q \cdot k_0^3}{E_j \cdot h_n^3} \cdot K_m. \dots \dots \dots (18)$$

Nogle K -kurver på figurerne viser faldende tendens ved aftagende armeringsprocent (under et vist beløb); dette skyldes, at midterområdet skrumper ind, så mere og mere af pladen forbliver urevnet og dermed forholdsvis stift yderområde.

Til sidst findes heraf den krybningsbetingede deformationstilvækst

$$\Delta\Theta = \Theta_{02} - \Theta_{01} \dots \dots \dots (19)$$

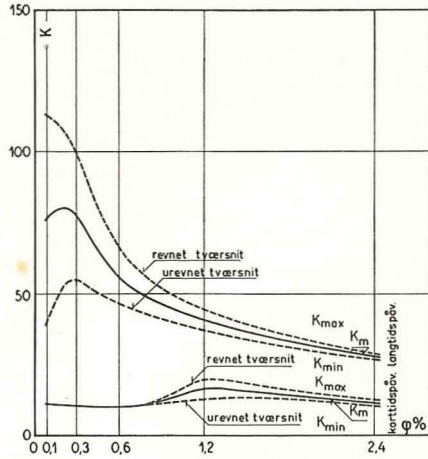


Fig. 7. Deformationskoefficienter K ved fuld indspænding.
Coefficients of deformation K . Rigidly built-in slabs.

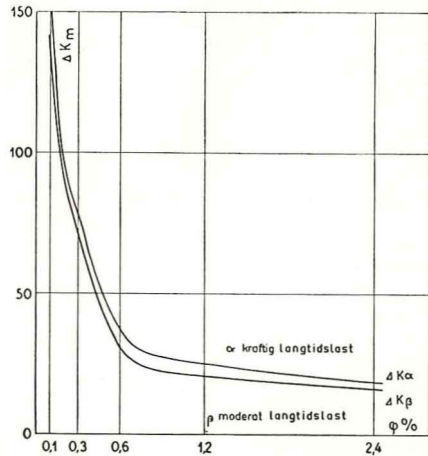


Fig. 8. Koefficienter ΔK for deformationstilvæksten $\Delta\Theta$ ved moderat indspænding.
Coefficients ΔK for deformation increment $\Delta\Theta$. Moderately clamped slabs.

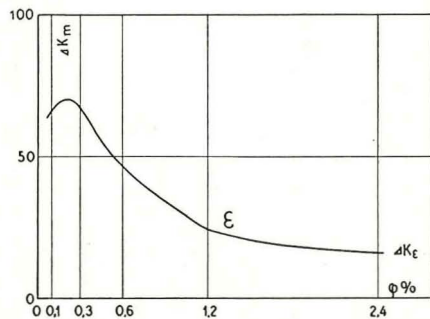


Fig. 9. Koefficienter ΔK for deformationstilvæksten $\Delta\Theta$ ved fuld indspænding.
Coefficients ΔK for deformation increment $\Delta\Theta$. Rigidly built-in slabs.

eller

$$\Delta\Theta = \frac{300}{16} \cdot \frac{q_2 \cdot k_0^3}{E_j \cdot h_n^3} \cdot \Delta K, \dots \dots \dots (20)$$

hvor

$$\Delta K = K_{m2} - \frac{q_1}{q_2} \cdot K_{m1}. \dots \dots \dots (21)$$

Figureerne 8 og 9 viser forløbet af nogle beregnede ΔK -værdier; overensstemmende med de beskrevne belastningsforudsætninger foretrækkes kurverne β og ϵ som de mest realistiske.

Anvendt på et betydeligt antal enkeltarmerede plader, dimensioneret efter vanlig praksis, giver (20) resultater som til eksempel illustreret ved fig. 10, der fremstiller $\Delta\Theta$, ved rundjernsarmering og moderat indspænding, i afhængighed af tilladelig betonspænding r_b og nulpunktsafstand k_0 .

På figuren er den iflg. (1) vedtagne øvre grænse for $\Delta\Theta$ indlagt som en vandret linie til skæring med $\Delta\Theta/r_b$ -diagrammerne; aflæsning af skæringspunkternes r_b -værdier resulterer herefter i den nederste kurve på fig. 12, der angiver øvre grænse for stivhedsmæssigt forsvarlige r_b -værdier i afhængighed af k_0 — altsammen under de eksempelvis valgte betingelser.

Ved alternative armeringsvalg og indspændingsvilkår fås samtlige r_b -grænsekurver i venstre side af fig. 1, her med spændvidden k som abscisse, udledt af k_0 iflg. (7) og (8).

Højre side af fig. 1 er resultatet af tilsvarende beregninger ved krydsarmerede plader, som behandles i næste afsnit.

Deformationer og forsvarlige r_b -værdier for krydsarmeret plade

Krydsarmerede pladers formændringer er besværligere at beregne end enkeltarmeredes; armeringsmængderne kan være forskellige i de to retninger, og sideforholdene $\gamma = \frac{k}{l}$ varierer inden for vide grænser. Med den under afsnit 3 omtalte stivhedsmæssige begrundelse vedrører undersøgelsen kun ensarmerede plader.

Da man må give afkald på eksakt beregning af den alsidigt understøttede jernbetonplades deformationer, kan man som tilnærmelse udlede disse ud fra den enkeltspændte plades deformationer i analogi med forholdene ved homogene plader med Hook'sk spændingsfordeling.

På grundlag af en tabel hos S. T i m o s h e n k o [3] beregnes en faktor ψ , hvormed man skal multiplicere nedbøjningen w af en sådan simpelt understøttet enkeltspændt plade med spændvidden k for at få nedbøjningen w^+

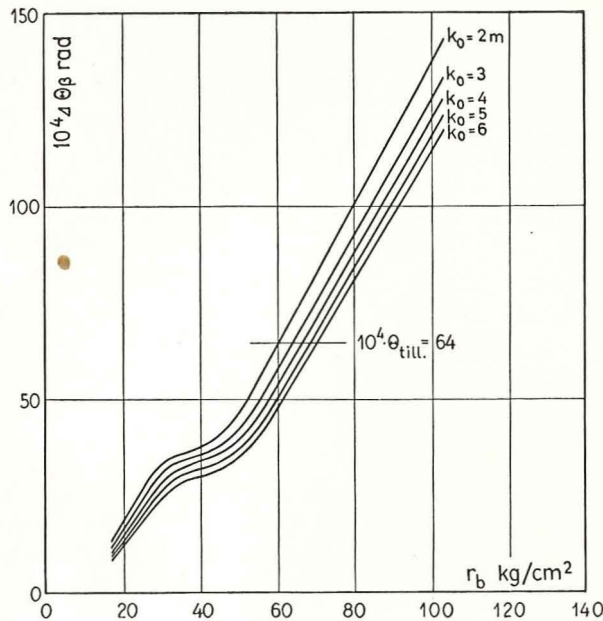


Fig. 10. Eksempel på deformationstilvækst $\Delta\theta$ i afhængighed af den tilladelige betontrykspænding r_b — enkeltarmeret, moderat indspændt plade med rundjernsarmering.

Example showing the deformation increment $\Delta\theta$ as a function of the permissible compressive stress in the concrete r_b . Moderately clamped slab reinforced in one direction with plain round bars.

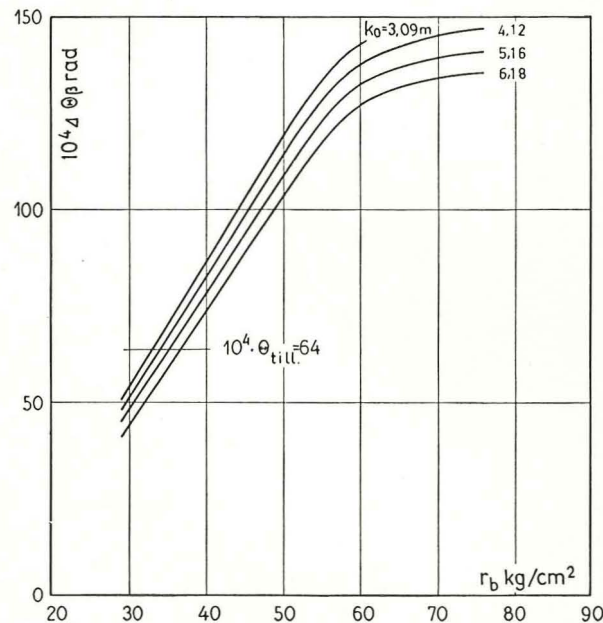
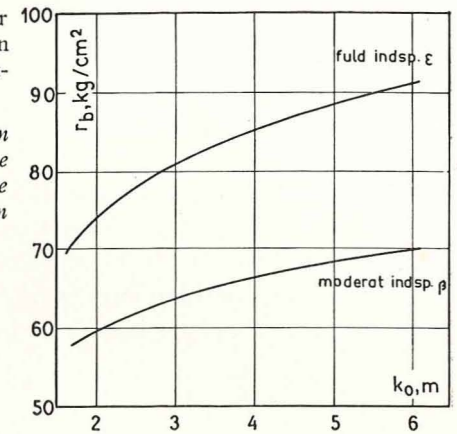


Fig. 11. Eksempel på deformationstilvækst $\Delta\theta$ i afhængighed af den tilladelige betontrykspænding r_b — krydsarmeret, moderat indspændt plade med Tentorstål Θ 2200.

Example showing the deformation increment $\Delta\theta$ as a function of the permissible compressive stress in the concrete r_b . Moderately clamped slabs reinforced in two directions with Tentor steel bars, Θ 2200.

Fig. 12. Eksempel på variationsinterval for stivhedsmæssigt forsvarlige værdier af den tilladelige betontrykspænding r_b — enkeltarmeret plade med rundjernsarmering.



Example showing the range of variation in the values of the permissible compressive stress in the concrete, r_b , ensuring adequate stiffness. Slabs reinforced in one direction with plain round bars.

af samme plade over samme spændvidde, men i dobbeltspændt tilstand med et sideforhold γ .

For den homogene, simpelt understøttede plade er faktoren ψ , hvormed nedbøjningen således multipliceres, praktisk taget den samme, hvormed pladens vinkeldrejning reduceres ved overgang fra enkelt- til dobbeltspændt tilstand. Dette udsagn lader vi som tilnærmelse gælde også for de inhomogene jernbetonplader og skriver (med + for "krydsarmering" og = for "enkeltarmering")

$$\Theta^+ = \psi \cdot \Theta^=, \dots\dots\dots (22)$$

hvoraf atter

$$\Delta\Theta^+ = \psi \cdot \Delta\Theta^= \dots\dots\dots (22 a)$$

De beskrevne forhold angår som nævnt simpelt understøttede plader, men kan udnyttes i indspændte hjørneplader, når man som yderligere tilnærmelse lader, som om

- 1) nulpunktsafstandene k_0 og l_0 på ethvert sted er proportionale med spændvidderne k og l — og som om
- 2) rektanglet $k_0 \times l_0$, der iflg. 1) forbinder pladens momentnulpunkter, er en niveaukurve for den deformerede plade.

I så fald gælder (22) også for den indspændte krydsarmerede plade, når ψ ansættes efter dennes sideforhold.

Mod de omtalte tilnærmelser kan bl. a. indvendes, at laboratorieforsøg iflg. Arne Johnson — [7] s. 222 nederst — har vist, at krydsarmerede pladers nedbøjning øges kendeligt, når deres vridningsstivhed går tabt som følge af diagonale revner. Eksempelvis fordobles kvadratiske pladers nedbøjning, når vridningsstivheden ødelægges, medens langstrakte plader er

mindre afhængige af denne stivhedskomponent. Antag nu, at gennemgående højst $2/3$ af vridningsstivheden under brugslast er sat ud af kraft; da får den kvadratiske plade højst 50 % større deformation end iflg. (22 a). Men denne ca. 50 %'s lokale overskridelse er ifølge afsnit 2 tilladt ved kvadratiske dobbeltspændte plader.

På tilsvarende måde som ved enkeltarmerede plader er et betydeligt antal krydsarmerede plader dimensioneret og deres middeldeformationer $\Delta\theta^+$ beregnet efter (22 a) og (20). Eksempelvis fremgår heraf fig. 11 (tentorstål \oplus 2200 og moderat indspænding), der ved den beskrevne aflæsning af skæringspunkter med vandret linie er basis for en nedre kurve på fig. 1's højre side.

Slutning

Hermed er i store træk gjort rede for en deformationsberegning, der under de antagne forudsætninger giver stivhedsmæssigt forsvarlige r_b -værdier iflg. fig. 1. Et orienterende forsøg på at formulere dette resultat som et hermed ensbetydende udsagn om stivhedsmæssigt forsvarlige værdier af det geometriske forhold mellem spændvidde og pladetykkelse har ikke ført til væsentlig forenkling, af hvilken grund den valgte formulering bibeholdes indtil videre.

SUMMARY

The present paper deals with a calculation of deformations for the purpose of establishing a design rule which ensures adequate stiffness of reinforced concrete slabs.

This calculation is carried out on the basis of three stress distribution patterns (see Figs. 2, 3, and 4), which are supposed to exist in various cross sections of the same slab under the action of the working load. The dissimilarity of these stress distribution patterns is due to assumed differences in the effect of the concrete in the tension zone.

The upper limit of the increment in the angle of rotation due to creep, $\Delta\theta$, is taken to be $64 \cdot 10^{-4}$ radians. This value corresponds to a deflection equal to $1/500$ of the span of a homogeneous beam.

The modulus of elasticity of the concrete, E_b , is estimated at 210 000 kg per cm^2 ($n = 10$) under *short-time loads* and 75 000 kg per cm^2 ($n = 28$) under *long-time loads*. For design purposes it is assumed that E_b is 140 000 kg per cm^2 ($n = 15$).

Half the number of reinforcing bars are bent up ($i = \frac{1}{2}$) over intermediate supports at the distance of one-fifth of the span. In exterior slabs reinforced in one direction and *rigidly built in* along one edge, the point at which the bars are bent up is supposed to coincide with the actual zero moment point. If the

slab is resiliently built in along one edge, then, in the case of *moderate clamping*, the actual zero moment point is assumed to be identical with the zero moment point in the state of failure. Analogous assumptions are made for corner slabs reinforced in two directions and built in along two edges. Other conditions at the edges are regarded as less dangerous than those enumerated in the above.

In order to find the actual increment in the angle of rotation of a simply supported slab reinforced in one direction, a combination of the long-time load q_2 , the span k_0 , the modulus of elasticity of the reinforcement E_s , and the effective thickness of the slab h_n expressed by Eq. (20) shall be multiplied by the factor ΔK , which is represented as a function of the ratio of reinforcement φ by the lowermost curve in Fig. 8.

The transition from slabs reinforced in one direction to those reinforced in two directions is rendered possible by an approximation based on an analogy with homogeneous slabs. The ratio of spans k and l in the two directions of a slab is found to be less important than the absolute size of the span k .

The results of this investigation are shown in Fig. 1. By estimating the conditions at the edges met with in each individual case, we can carry out an approximate interpolation between lower and upper diagrams in Fig. 1 after selecting the method of reinforcement and the steel grade. In this manner we find a value of the permissible compressive stress in the concrete, r_b , which ensures adequate stiffness within the validity range of the assumptions described in the above. This value is then employed in the usual method of design of the most heavily stressed slab in a reinforced concrete floor.

Litteraturliste

- [1] Niels M. Plum: "Dæk og Huse." Statens Byggeforskningsinstitut rapport nr. 7. København. Teknisk Forlag. 1952.
- [2] K. W. Johansen: "Pladeformler." 2. udgave. København. Polyteknisk Forening. 1949.
- [3] S. Timoshenko: "Theory of Plates and Shells." New York, London. McGraw-Hill. 1940.
- [4] Normer for beregning og udførelse af stålkonstruktioner (foreløbige normer). København. Dansk Ingeniørforening. 1. udgave. 1941.
- [5] DS 411. Dansk Ingeniørforenings normer for bygningskonstruktioner. 2. Beton- og jernbetonkonstruktioner. København. Teknisk Forlag og Dansk Standardiseringsråd. 1949.
- [6] DS 413. Dansk Ingeniørforenings normer for bygningskonstruktioner. 4. Trækonstruktioner. København. Teknisk Forlag og Dansk Standardiseringsråd. 1954.
- [7] Arne Johnson: "Beräkning av deformationer i armerade betongkonstruktioner efter sprickbildningen". Betong. Stockholm. Årg. 35. 1950. Nr 2, s. 201—227.
- [8] H. Nylander: "Korsarmerade betongplattor." Betong. Stockholm. Årg. 35: 1950. Nr 2, s. 149—200.
- [9] E. Trudsø: "Økonomisk Dimensionering af Jernbetondæk." Ingeniøren B. København. Årg. 66. 1957. Nr. 22.

APPENDIX

I revnede tværsnit med spændingsfordeling som på fig. 2 gælder følgende sammenhæng mellem den trykkede betons kantspænding σ^c_b , enhedsmomentet M_{100} , nyttehøjden h_n , elasticitetsforholdet n og spændingsforholdet $\gamma = \frac{\sigma_j}{\sigma^c_b}$ samt armeringsprocenten φ :

$$\gamma^2 + \gamma \cdot n - 50 \cdot \frac{n}{\varphi} = 0 \quad \dots \quad (a) \quad \text{og} \quad \sigma^c_b = \frac{M_{100}}{h_n^2} \cdot \frac{6 \cdot (n + \gamma)^2}{n \cdot (2n + 3\gamma)} \quad \dots \quad (b)$$

I urevnede tværsnit med spændingsfordeling iflg. fig. 3 gælder tilsvarende

$$\gamma^2 + \gamma \cdot \left[n + \frac{50}{\varphi} \cdot \frac{\sigma_{aekv.}}{\sigma^c_b} \left(1 + \frac{t}{h_n} \right) \right] - 50 \cdot \frac{n}{\varphi} \cdot \left(1 - \frac{\sigma_{aekv.}}{\sigma^c_b} \cdot \frac{t}{h_n} \right) = 0 \quad \dots \quad (c)$$

og

$$\sigma^c_b = \frac{M_{100}}{h_n^2} \cdot \frac{6 \cdot (n + \gamma)^2}{n \cdot (2n + 3\gamma)} + \sigma_{aekv.} \cdot \left[\frac{\gamma^2}{n \cdot (2n + 3\gamma)} - \frac{\gamma \cdot (n + \gamma)}{n \cdot (2n + 3\gamma)} \cdot \frac{t}{h_n} \right] \quad \dots \quad (d)$$

Disse to ligninger er for givne værdier af φ løst sammen *ved forsøg* i bl. a. den række tilfælde, som ligger til grund for fig. 5.

I det urevnede yderområde med spændingsfordelingen ifølge fig. 4 gælder:

$$\gamma = \frac{n}{1 + \frac{n \cdot \varphi}{50} + 2 \cdot \frac{t}{h_n}} \quad \dots \quad (e) \quad \text{og} \quad \sigma^c_b = \frac{M_{100}}{h_n^2} \cdot \frac{6n \cdot (n + \gamma)}{2n^2 + n \cdot \gamma - \gamma^2} \quad \dots \quad (f)$$

For grænsekoordinaten z_g mellem midter- og yderområde haves, idet $k_1 = \frac{1}{2} \cdot k_0$

$$1 - \left(\frac{z_g}{k_1} \right)^2 = \frac{(n + \gamma_{min.})^2}{(n + \gamma_g)^2 \cdot \gamma_g} \cdot \frac{n^2 \cdot (2n + 3\gamma_g) - \gamma_g^2 \cdot \left[\gamma_g - (n + \gamma_g) \cdot \frac{t}{h_n} \right]}{m \cdot n \cdot (2n + 3\gamma_{min.}) - \gamma_{min.} \cdot \left[\gamma_{min.} - (n + \gamma_{min.}) \cdot \frac{t}{h_n} \right]} \quad \dots \quad (g)$$

hvor $\gamma_{min.}$ er spændingsforholdet $\frac{\sigma_j}{\sigma^c_b}$ i et urevnet snit ved midten og

γ_g er spændingsforholdet $\frac{\sigma_j}{\sigma^c_b}$ i grænsesnittet, medens $m = \frac{\sigma^c_{b, min.}}{\sigma_{aekv.}}$.